UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2007-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **13/02/2008**
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 120 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

a) Escriba una función que permita localizar las raíces de una función **fun** si se conoce un intervalo inicial **[a,b]** y el paso **h**=Δx, y que de cómo resultado un arreglo de rangos que contengan raíces y el numero de estas contenidas en el intervalo.

Sugerencia.- utilizar el teorema de Bolzano en su rutina y usar la siguiente cabecera:

function [raíces, numraices]=ubicaraices(fun, a, b, h)

Solución

```
function [raices, numraices]=ubicaraices(fun, a, b, h)
x=a:h:b;
y=feval(fun,x);
raices=[];
numraices=0;
for i=1:length(x)-1
  if y(i)*y(i+1)<0
    raices=[raices; x(i) x(i+1)];
    numraices=numraices+1;
  end
end
```

b) Para el siguiente sistema:

a+b=4
b+3c=2
a+b+c=1;

Sin pivoteo calcular la solución usando el método de Gauss-Jordan, indique los pasos detalladamente.

Solución

$$\tilde{A}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$f3 = f3 - f1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f1 = f1 - f2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f1 = f1 + 3f3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f2 = f1 - 3f3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}$$

c) Suponga que deseamos resolver las siguientes ecuaciones simultáneas:
$x_1(x_1 - x_2) = 4$ y $x_1^2 + x_2^2 = 25$
Es posible encontrar el algoritmo de las aproximaciones sucesivas que converja al punto cercano a $[\,3, 2]^t$. Primero pruebe la convergencia. Comente su respuesta. No es necesario realizar iteraciones.

Solución

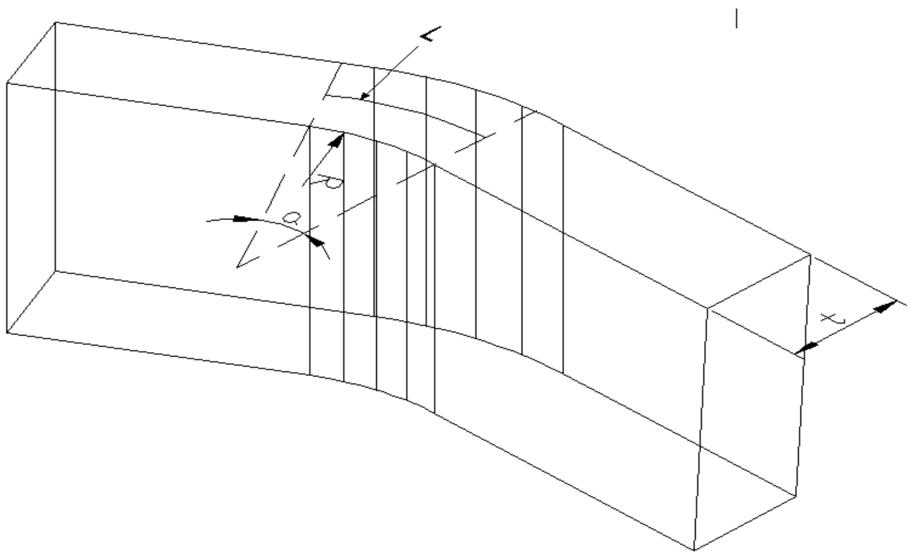
$$x = \sqrt{4 + xy}$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$JG = \begin{bmatrix} \dfrac{y}{2\sqrt{4+xy}} & \dfrac{x}{2\sqrt{4+xy}} \\ \dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} & 0 \end{bmatrix} \qquad JG(3,2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.75 \\ 1.44 & 0 \end{bmatrix} \qquad \|JG\| = 1.0662$$

No cumple el criterio de convergencia, pero converge, se puede demostrar en tres iteraciones, esto ocurre porque es un criterio necesario pero no suficiente.

Problema 2
El doblado es una de las operaciones más comunes del formado de piezas mecánicas. Como se ve en la figura la holgura o tolerancia en el doblado es la longitud (***L***) del eje neutro en el doblez, y se usa para determinar la longitud de la pieza bruta con que se fabrica una pieza doblada. Si el espesor de la plancha es ***t***=5.1672 mm., el radio del doblez es ***R***=13.2624 mm y el ángulo del doblez ***a***=1.0052 rad.



Si : $L = a\left[R + \frac{t}{2}\right]$.

a) Se desea obtener L con un error no mayor al 5% ¿Qué errores absolutos y relativos son permisibles en ***R***, ***t*** y ***a***?
b) Si los cálculos se realizan con un computador hipotético **F(10,3,-4,4)** el cual trabaja por redondeos, determine el valor aproximado para ***L***. Comente sus discrepancias con respecto a lo obtenido en a).

Solución
a)

$$L = a\left[R + \frac{t}{2}\right] = 15.9284$$

$$\xi L = 0.05 * 15.9284 = 0.7964$$

$$\xi L \leq \left|\frac{\partial L}{\partial a}\right| \xi a + \left|\frac{\partial L}{\partial R}\right| \xi R + \left|\frac{\partial L}{\partial t}\right| \xi t$$

Errores permisibles se obtienen aplicando el principio de igual efecto:

$$\xi a \leq \frac{\xi L}{3\left|\frac{\partial L}{\partial a}\right|} = \frac{\xi L}{3 * (R + t/2)} = 0.0168\ (1.6667\%)$$

$$\xi R \leq \frac{\xi L}{3\left|\frac{\partial L}{\partial R}\right|} = \frac{\xi L}{3 * a} = 0.2641\ (1.9913\%)$$

$$\xi t \leq \frac{\xi L}{3\left|\frac{\partial L}{\partial t}\right|} = \frac{\xi L}{3 * (a/2)} = 0.5282\ (10.2222\%)$$

b)
Redondeando a 3 dígitos significativos
L=1.0052*(13.2624+5.1672/2)

L=**1.01*(13.3**+**5.17/2)**
L=**1.01*(13.3**+2.585**)**
L=**1.01*(13.3**+**2.59)**
L=**1.01***15.89
L=**1.01*15.9**
L=16.0590
L=**16.1**

Se observa una pérdida de precisión con respecto al valor obtenido en a) que fue 15.9284, debido a la aritmética del computador empleado.

Problema 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & m \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a) Hallar el valor de m para que el método Gauss-Seidel sea convergente.
b) Calcular el valor de m para que el radio espectral sea 0
c) Con el valor de m calculado anteriormente, halle el valor de X y con $X_0=[100,100,100]^T$ hasta que el error sea 0.

Solución

Parte a)

$$(D-L) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(D-L)^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T = (D-L)^{-1}U = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 16m-8 \\ 0 & 0 & -2m-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/3-1/6 \\ 0 & 0 & -m/24-5/48 \end{bmatrix}$$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/3 \\ 0 & 0 & -m/24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & m/3-1/6 \\ 0 & 0 & -m/24-5/48-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \text{m/3} \\ 0 & 0 & -\text{m/24} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-\lambda * (\text{-m/24} - 5/48 - \lambda))$$

$$|A-\lambda I| = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = \text{-m/24} - 5/48$$

$$|\lambda_3| = |-\text{ m/24} - 5/48| < 1$$

m<21.5 y m>-26.5

Parte b)
De la ecuación anterior m=-5/2

Parte c)
Reemplazando el valor de m=-5/2

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5000 \\ 0 & 0 & -1.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$c = (D-L)^{-1} * U = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 1.0000 \\ 0.1250 \end{bmatrix}$$

Aplicando la formula de recurrencia: X=TX+c
X0= [100 100 100]
X1= [52.0000 -99.0000 0.1250]
X2= [2.0625 0.8750 0.1250]
X3= [2.0625 0.8750 0.1250]

Problema 4
El flujo de un canal abierto es comúnmente descrito usando la ecuación de Manning.:

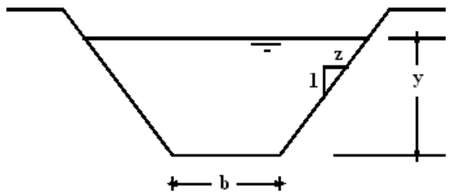
$$Q = \frac{C_u}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}$$

Donde:

Q= razón de flujo, C_u= 1.486, n=coeficiente de resistencia de Manning, A= área de la sección transversal, R= radio hidráulico de la sección transversal, S_0=pendiente del canal. El radio hidráulico esta definido como A/P, donde P= es el perímetro mojado del canal. Con estas definiciones la ecuación de Manning se convierte en:

$$Q = \frac{C_u}{n} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} S_0^{1/2} \quad \text{ó} \quad \boxed{nP^{2/3}Q - C_u A^{5/3} S_0^{1/2} = 0}$$

Expresiones para el área, A, y el perímetro mojado P, son dados en términos de las propiedades geométricas de la sección transversal. Por ejemplo, para un canal trapezoidal de ancho de base b, altura de flujo, y, y pendiente del lado, z, como se muestra en la siguiente figura, la expresión de A y P son: $A = (b + zy)y$
$P = b + 2y\sqrt{1+z^2}$



Para los siguientes parámetros que están en las unidades correctas (English System)

Q=50; b=2.5; z=1.5; So=0.001; n=0.0150, se pide:

a) Realice tres iteraciones usando Bisección, Si se sabe que y está entre 1.5 y 2.
b) Con el último valor obtenido en a) ingrese al método de Newton Raphson y realice las iteraciones necesarias para alcanzar al menos 4 c.d.e.
c) Levante el gráfico a mano alzada y comente la convergencia con newton si yo=1.39. (No realice iteraciones).

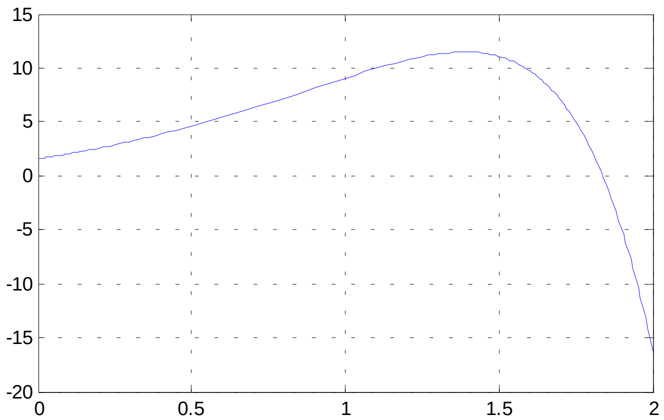
Nota: Si fuera posible use la derivada numérica, con $\Delta y = 0.0001$

Solución

a)
a=1.5,b=2
x1=(a+b)/2=1.75
a=1.75   b=2
x2=(a+b)/2=1.875
a=1.75   b=1.875
x3=1.8125

b)
Newton Raphson
x0=1.8125
x1=1.84049405834704
x2=1.83755383925902
x3=1.83752781486142

c) En x0=1.39 el método de Newton Raphson fallaría por elegir un punto inicial cerca de un punto crítico (máximo).



Los Profesores